

پیشامد عضوهایی از S که بر ۴ بخش پذیرند: B

پیشامد عضوهایی از S که بر ۳ بخش پذیرند: A

روش اول:

$$S = \{1, 2, 3, 4, \dots, 200\} \Rightarrow n(S) = 200, \quad n(A) = \left\lfloor \frac{200}{3} \right\rfloor = 66, \quad n(A \cap B) = \left\lfloor \frac{200}{12} \right\rfloor = 16$$

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{n(A)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{66}{200} - \frac{16}{200} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$$

روش دوم:

$$n(A) = ? ; 1 \leq 3k \leq 200 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{3k}{3} \leq \frac{200}{3} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 1 \leq k \leq 66 \Rightarrow n(A) = 66$$

$$n(A \cap B) = ? ; 1 \leq 12k \leq 200 \Rightarrow \frac{1}{12} \leq \frac{12k}{12} \leq \frac{200}{12} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 1 \leq k \leq 16 \Rightarrow n(A \cap B) = 16$$

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{n(A)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{66}{200} - \frac{16}{200} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$$

روش سوم:

$$A = \{3, 6, 9, 12, \dots, 198\} \Rightarrow n(A) = \frac{198}{3} = 66 ; \quad B = \{4, 8, 12, 16, \dots, 200\}$$

$$A \cap B = \{12, 24, \dots, 192\} \Rightarrow n(A \cap B) = \frac{192}{12} = 16$$

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{n(A)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{66}{200} - \frac{16}{200} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$$

a : یک عدد اول

b : یک عدد غیر اول

$$S : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(a) = \frac{1}{6}P(b) \Rightarrow \begin{cases} P(1) = P(4) = P(6) = x \\ P(2) = P(3) = P(5) = \frac{1}{6}x \end{cases}$$

$$P(S) = 1 \Rightarrow P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x + x + \frac{1}{6}x + x = 1 \Rightarrow 15x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{15}$$

$$P(\{2, 4, 6\}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6}x + x + x = \frac{13}{6}x = \frac{13}{6} \times \frac{1}{15} = \frac{13}{90}$$

شیوۀ بیان دوم:

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P(x_i)$	x	$\frac{1}{6}x$	$\frac{1}{6}x$	x	$\frac{1}{6}x$	x

$$P(S) = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x + x + \frac{1}{6}x + x = 1 \rightarrow 15x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{15}$$

$$P(\{2, 4, 6\}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6}x + x + x = \frac{13}{6}x = \frac{13}{6} \times \frac{1}{15} = \frac{13}{90}$$

روش اول:

$$P(A'|B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B - A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B)$$

روش دوم:

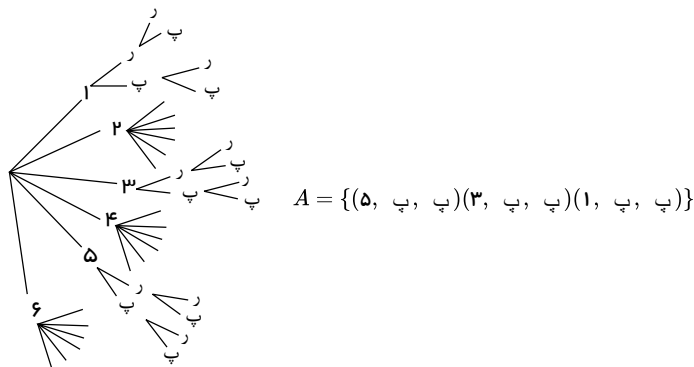
$$P(A \cup A' | B) = P(S | B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$P(A \cup A' | B) = 1 \Rightarrow \frac{P((A \cup A') \cap B)}{P(B)} = 1 \xrightarrow{A \cap A' = \emptyset} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = 1$$

$$\Rightarrow P(A | B) + P(A' | B) = 1 \Rightarrow P(A' | B) = 1 - P(A | B)$$

۵

با استفاده از نمودار درختی، فضای نمونه‌ای و سپس پیشامد مورد نظر را تعیین می‌کنیم:



۶

الف

$$n(S) = ۶۵۴۳۲۱ = ۶!$$

$$n(A) = \frac{۲}{۶} \frac{۱}{۵} \frac{۴}{۴} \frac{۳}{۳} \frac{۲}{۲} \frac{۱}{۱} \rightarrow P(A) = \frac{۴! ۲! \times ۵}{۶!}$$

ب

$$n(B) = \frac{۳}{۶} \frac{۲}{۵} \frac{۱}{۴} \frac{۱}{۳} \frac{۱}{۲} \frac{۱}{۱} \rightarrow P(B) = \frac{۳!}{۶!}$$

پ

$$n(C) = \frac{۱}{۶} \frac{۴}{۵} \frac{۳}{۴} \frac{۲}{۳} \frac{۱}{۲} \frac{۱}{۱} \rightarrow P(C) = \frac{۴!}{۶!}$$

۷

طبق رابطه احتمال شرطی داریم:

$$P(B|E) = \frac{P(E \cap B)}{P(E)} = \frac{۹۰}{۱۱۰} = \frac{۹}{۱۱}$$

$$P(D|G) = \frac{P(D \cap G)}{P(G)} = \frac{۶۰}{۸۰} = \frac{۳}{۴}$$

$$P(B|E) + P(D|G) = \frac{۹}{۱۱} + \frac{۳}{۴} = \frac{۶۹}{۴۴}$$

۸

اطلاعات داده‌شده در مسئله را به صورت زیر کدگذاری می‌کنیم:

انگلیسی بودن فرد: E

آمریکایی بودن: A

حرف صدادار: F

$$P(A) = ۰٫۶ \quad P(E) = ۰٫۴$$

$$P(F|A) = \frac{۲}{۵} \quad P(F|E) = \frac{۳}{۶}$$

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F|E)P(E) + P(F|A)P(A)} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{4}{10})}{\frac{1}{3}(\frac{4}{10}) + \frac{2}{5}(\frac{6}{10})} = \frac{5}{11}$$

۹

الف ناسازگار

۱۰

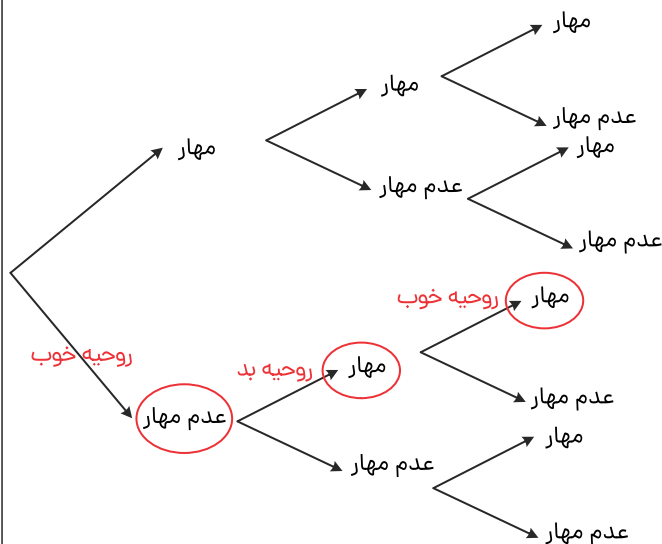
الف درست

۱۱ روش اول:

A_i : پیشامد مهار i ، آمین ضربه پناالتی

$$P(A'_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A'_1) \cdot P(A_2|A'_1) \cdot P(A_3|A'_1 \cap A_2) = \frac{40}{100} \times \frac{30}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{72}{1000} = 0,072$$

روش دوم:



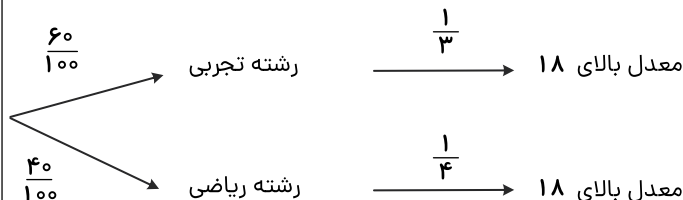
$$P(A'_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{40}{100} \times \frac{30}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{72}{1000} = 0,072$$

۱۲ B_1 : پیشامد تحصیل در رشته تجربی

B_2 : پیشامد تحصیل در رشته ریاضی

A : پیشامد داشتن معدل بالای ۱۸

روش اول:



$$P(A) = \frac{60}{100} \times \frac{1}{3} + \frac{40}{100} \times \frac{1}{4} = \frac{20}{100} + \frac{10}{100} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{60}{100} \times \frac{1}{3}}{\frac{30}{100}} = \frac{\frac{20}{100}}{\frac{30}{100}} = \frac{2}{3}$$

روش دوم:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) = \frac{60}{100} \times \frac{1}{3} + \frac{40}{100} \times \frac{1}{4} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{60}{100} \times \frac{1}{3}}{\frac{3}{10}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$$

روش سوم:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)} = \frac{\frac{60}{100} \times \frac{1}{3}}{\frac{60}{100} \times \frac{1}{3} + \frac{40}{100} \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$$

۱۳

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

روش اول:

$$\left. \begin{aligned} A &= \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \\ B &= \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A) \times P(B) = \frac{1}{54}$$

$$A \cap B = \{(5, 4)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$$

بنابراین A و B مستقل از یکدیگر نیستند.

روش دوم:

$$A = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

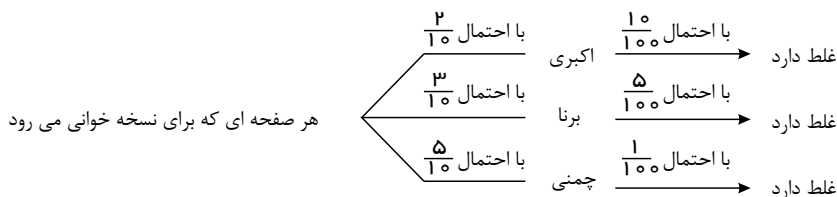
$$A \cap B = \{(5, 4)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} \neq P(A)$$

$$\text{یا } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \neq P(B)$$

۱۴

طبق نمودار درختی داریم:

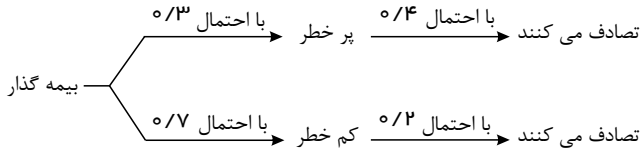


$$P(\text{غلط داشتن هر صفحه}) = \frac{10}{100} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{100} + \frac{5}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{20 + 15 + 5}{1000} = \frac{40}{1000} = \frac{4}{100}$$

$$P(\text{غلط داشتن} \cap \text{نسخه خوانی خانم اکبری}) = \frac{P(\text{غلط داشتن} | \text{نسخه خوانی خانم اکبری})}{P(\text{غلط داشتن})}$$

$$= \frac{\frac{2}{10} \times \frac{1}{10}}{\frac{4}{100}} = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{4}{100}} = \frac{1}{2}$$

۱۵ طبق نمودار درختی داریم:
(الف)



$$P(\text{تصادف کردن بیمه‌گذار}) = 0.4 \times 0.3 + 0.2 \times 0.7 = 0.12 + 0.14 = 0.26$$

(ب)

$$P(\text{تصادف کرده باشد} | \text{پرخطر بودن}) = \frac{P(\text{تصادف کرده} \cap \text{پرخطر بودن})}{P(\text{تصادف کرده})} = \frac{\frac{12}{100}}{\frac{26}{100}} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$$

۱۶

می‌دانیم برای دو پیشامد $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y|X)$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P((A_1 \cap A_2) \cap A_3) = \underbrace{P(A_1 \cap A_2)}_{P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)} \cdot P(A_3|(A_1 \cap A_2))$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|(A_1 \cap A_2))$$

۱۷ (الف)

A = مهره اول قرمز
مستقل اند A و B

B = مهره دوم قرمز

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

(ب)

C = پیشامد حداقل یک مهره آبی بودن

$$P(C') = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{9} \Rightarrow P(C) = 1 - P(C') = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

(پ)

$$P(\text{هر دو مهره زرد} \cap \text{هر دو مهره آبی} \cap \text{هر دو مهره قرمز}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

۱۸ (الف) جدول احتمال هر ناحیه را به دست می‌آوریم.

ناحیه	۱	۲	۳	۴	۵
احتمال برخورد	x	$3x$	$5x$	$7x$	$9x$

$$x + 3x + 5x + 7x + 9x = 25x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{25}$$

پس دوباره جدول را به صورت زیر رسم می‌کنیم.

ناحیه	۱	۲	۳	۴	۵
احتمال برخورد	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{9}{25}$

(ب)

$$P(\text{برخورد به ناحیه‌های ۱ یا ۳ یا ۴}) = \frac{1}{25} + \frac{5}{25} + \frac{7}{25} = \frac{13}{25}$$

$$P(\text{برخورد به ناحیه‌های ۲ یا ۵}) = \frac{3}{25} + \frac{9}{25} = \frac{12}{25}$$

پس احتمال برخورد به نواحی ۱ یا ۳ یا ۴ بیش‌تر از برخورد به نواحی ۲ یا ۵ است.

۱۹ گزینه ۲ گزینهٔ «۲» صحیح است و برای اثبات می‌توانیم از برهان خلف استفاده کنیم.

اگر نامساوی $P(A|B) \leq P(A|B \cup C)$ برقرار نباشد پس $P(A|B) > P(A|B \cup C)$ است و داریم:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} > \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)} \xrightarrow{B \cap C = \emptyset} \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C)}{P(B) + P(C)}$$

$$\rightarrow P(A \cap B) \times (P(B) + P(C)) > P(B) \times (P(A \cap B) + P(A \cap C))$$

$$\rightarrow P(A \cap B) \times P(C) > P(B) \times P(A \cap C) \xrightarrow{\div P(B)P(C)} P(A|B) > P(A|C)$$

که با فرض داده شده در تناقض است پس $P(A|B) \leq P(A|B \cup C)$ است و قسمت دوم نامساوی هم دقیقاً به همین صورت اثبات می‌شود.

۲۰ گزینه ۳

$$P(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{q}, \quad P(y) = \frac{1}{4}, \quad P(z) = \frac{1}{4} \times q$$

$$P(x) + P(y) + P(z) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4q} + \frac{1}{4} + \frac{q}{4} = 1 \xrightarrow{\times 4q} 1 + q + q^2 = 4q \Rightarrow q^2 - 3q + 1 = 0$$

$$\Rightarrow q = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad (q > 1 \text{ غلط}) \\ q = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \checkmark \end{cases}$$

$$P(x) = \frac{1}{4q} = \frac{1}{6 - 2\sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{8}$$